

Penyelesaian Terus Persamaan Pembezaan Biasa Peringkat Tiga menggunakan Kaedah Blok Hibrid Kolokasi Diperbaiki (Solution of Third Order Ordinary Differential Equation using Improved Block Hybrid Collocation Method)

LEE KHAI CHIEN, UMMUL KHAIR SALMA DIN* & ROKIAH ROZITA AHMAD

ABSTRACT

The improved block hybrid collocation method (KBHK(B)) with two off-step points and four collocation points is proposed for the direct solution of general third order ordinary differential equations. Modification is done by adding first derivative of third order function into the general form of block hybrid collocation method to yield KBHK(B). Both main and additional methods are derived via interpolation (power series function) and collocation of the basic polynomial. An improved block method is derived to provide the approximation at five points concurrently. Zero stability, consistency, convergence and absolute stability region of KBHK(B) are investigated. Some numerical examples with exact solution are tested to illustrate the efficiency of the method. KBHK(B) is compared by other block hybrid collocation method in term of global error and step number. It is shown that KBHK(B) generates minimum global error with minimum step number.

Keywords: Block hybrid collocation method; consistency; convergence; third order ordinary differential equations; zero stability

ABSTRAK

Kaedah blok hibrid kolokasi diperbaiki, KBHK(B) dengan dua langkah dan empat titik kolokasi dalam satu blok dibangunkan untuk menyelesaikan masalah persamaan pembezaan biasa peringkat tiga (PPBPT) secara langsung. Penambahan fungsi terbitan pertama bagi PPBPT ke dalam rumus kaedah blok hibrid kolokasi sedia ada dilakukan untuk menghasilkan rumus KBHK(B). Kaedah utama dan kaedah sampingan dihasilkan melalui kaedah interpolasi, iaitu fungsi siri kuasa dan kolokasi terhadap rumus polinomial asas. Kaedah tersebut dibentuk dalam blok untuk menghasilkan anggaran penyelesaian bagi empat titik penyelesaian dengan serentak. Sifat kaedah tersebut diuji daripada segi kestabilan sifar, ketekalan, penumpuan dan rantau kestabilan mutlak. Perbandingan KBHK(B) dengan kaedah blok hibrid kolokasi sedia ada dengan menyelesaikan beberapa masalah berangka peringkat tiga dijalankan untuk menguji keberkesanan kaedah tersebut. Didapati KBHK(B) menghasilkan ralat sejagat yang minimum dengan jumlah bilangan langkah yang paling minimum.

Kata kunci: Kaedah blok hibrid kolokasi; kestabilan sifar; ketekalan; penumpuan; persamaan pembezaan biasa peringkat tiga

PENGENALAN

Dalam kajian ini, tumpuan diberikan kepada masalah nilai awal bagi persamaan pembezaan biasa peringkat tiga (PPBPT) yang diwakili oleh:

$$y''' = f(x, y(x), y'(x), y''(x)),$$
$$y(a) = \alpha, y'(a) = \beta, y''(a) = \gamma, x \in [a, b]. \quad (1)$$

Persamaan (1) kerap kali digunakan dalam pemodelan bagi bidang sains, ekonomi dan kejuruteraan seperti gelombang elektromagnet dan aliran graviti. Pendekatan biasa untuk menyelesaikan (1) adalah penurunan peringkat kepada suatu sistem dengan tiga PPB peringkat pertama dan diselesaikan melalui kaedah satu langkah atau multi-langkah seperti kaedah Runge-Kutta, kaedah Euler dan kaedah Adams (Yap et al. 2014). Namun, kos penilaian dan ralat pangkasan akan ditambah. Oleh itu, kaedah langsung

diperlukan untuk mengelakkan peningkatan kos penilaian dan pertumbuhan ralat pangkasan. Kaedah blok hibrid kolokasi adalah satu daripada kaedah langsung yang cekap dalam menyelesaikan PPBPT.

Kajian tentang kaedah blok hibrid dalam menyelesaikan PPB peringkat tiga secara langsung telah menjadi tumpuan ramai penyelidik seperti Jator (2008), Majid et al. (2012, 2010), Mohammed dan Adeniyi (2014), Olabode dan Yusuph (2009) dan Yap et al. (2014) yang mengemukakan kaedah blok tersirat dengan dua-titik empat langkah yang berasaskan penggunaan kaedah Adams-Moulton yang ringkas untuk menyelesaikan sistem persamaan pembezaan biasa peringkat ketiga. Adesanya et al. (2013) membina kaedah blok hibrid peramal-pembetul dengan satu langkah dan tiga titik hibrid bagi menyelesaikan PPBPT. Kaedah blok tersebut dibina melalui rumus interpolasi dan kolokasi atas penggunaan fungsi siri kuasa untuk menghasilkan kaedah multi-langkah yang selanjut. Yap et al. (2014) pula

mengemukakan kaedah blok hibrid kolokasi atas gabungan dua titik luar-langkah. Kaedah dibina dengan melakukan interpolasi dengan fungsi siri kuasa pada titik $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$ dan terbitan ketiga bagi polinomial interpolasi digunakan sebagai persamaan kolokasi pada titik $\{x_{n+i}\}, i = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$. Kaedah tersebut digunakan untuk menyelesaikan masalah persamaan Genesio dan aliran lapisan nipis yang terdiri daripada PPBPT. Tujuan kajian ini adalah untuk membina kaeah blok hibrid kolokasi diperbaiki dengan mengubah suai rumus kaedah blok hibrid kolokasi sedia ada dan membandingkannya dengan kaedah sedia ada.

PEMBINAAN KAEDAH BLOK HIBRID KOLOKASI DIPERBAIKI (KBHK(B))

KBHK(B) bagi menyelesaikan PPBPT dirumuskan seperti berikut:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \alpha_{v_j} y_{n+v_j} = h^3 \left(\sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \beta_{v_j} f_{n+v_j} \right) + h^4 \left(\sum_{j=0}^k \gamma_j g_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \gamma_{v_j} g_{n+v_j} \right),$$

$$g_{n+v_j} = f'_{n+v_j}, v_j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \tag{2}$$

Fungsi interpolasi $Y(x)$ digunakan untuk menganggar penyelesaian dalam rumus (2) dalam bentuk fungsi siri kuasa, iaitu

$$Y(x) = \sum_{i=0}^{r+s-1} a_i x^i, \tag{3}$$

dengan $x \in [x_n, x_{n+2}]$, a_i adalah pekali nyata yang perlu ditentukan kemudian, r bilangan interpolasi bagi $1 \leq r \leq k$ dan s bilangan titik kolokasi tak selanjur dengan $s > 0$.

Seterusnya, terbitan ketiga dan keempat adalah,

$$Y'''(x) = f(x) = j(j-1)(j-2) \sum_{i=0}^{r+s-1} a_i x^{i-3}, \tag{4}$$

$$Y^{(4)}(x) = g(x) = j(j-1)(j-2)(j-3) \sum_{i=0}^{r+s-1} a_i x^{i-4}. \tag{5}$$

Anggaran penyelesaian selanjur dibina dengan memenuhi syarat berikut:

$$Y(x_{n+j}) = y_{n+j}, j = 0, 1, 2, \tag{6}$$

$$Y'''(x_{n+\mu}) = f_{n+\mu}, \mu = \left\{ j, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}, j = 0, 1, 2, \dots, k, \tag{7}$$

$$Y^{(4)}(x_{n+\mu}) = g_{n+\mu}, \mu = \left\{ j, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}, j = 0, 1, 2, \dots, k, \tag{8}$$

Interpolasi dilakukan terhadap (3) pada titik x_n, x_{n+1}, x_{n+2} dan kolokasi dilakukan terhadap (4) dan (5) pada titik $x_n, x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+\frac{3}{2}}, x_{n+2}$ untuk menjana fungsi f dan terbitan fungsi, iaitu f' . Sistem 13 persamaan linear dalam bentuk matriks dapat dihasilkan,

$$AX = U,$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & x_n^4 & x_n^5 & x_n^6 & x_n^7 & x_n^8 & x_n^9 & x_n^{10} & x_n^{11} & x_n^{12} \\ 1 & x_{n+\frac{1}{2}} & x_{n+\frac{1}{2}}^2 & x_{n+\frac{1}{2}}^3 & x_{n+\frac{1}{2}}^4 & x_{n+\frac{1}{2}}^5 & x_{n+\frac{1}{2}}^6 & x_{n+\frac{1}{2}}^7 & x_{n+\frac{1}{2}}^8 & x_{n+\frac{1}{2}}^9 & x_{n+\frac{1}{2}}^{10} & x_{n+\frac{1}{2}}^{11} & x_{n+\frac{1}{2}}^{12} \\ 1 & x_{n+\frac{3}{2}} & x_{n+\frac{3}{2}}^2 & x_{n+\frac{3}{2}}^3 & x_{n+\frac{3}{2}}^4 & x_{n+\frac{3}{2}}^5 & x_{n+\frac{3}{2}}^6 & x_{n+\frac{3}{2}}^7 & x_{n+\frac{3}{2}}^8 & x_{n+\frac{3}{2}}^9 & x_{n+\frac{3}{2}}^{10} & x_{n+\frac{3}{2}}^{11} & x_{n+\frac{3}{2}}^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24x_n & 60x_n^2 & 120x_n^3 & 210x_n^4 & 336x_n^5 & 504x_n^6 & 720x_n^7 & 990x_n^8 & 1320x_n^9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24x_{n+\frac{1}{2}} & 60x_{n+\frac{1}{2}}^2 & 120x_{n+\frac{1}{2}}^3 & 210x_{n+\frac{1}{2}}^4 & 336x_{n+\frac{1}{2}}^5 & 504x_{n+\frac{1}{2}}^6 & 720x_{n+\frac{1}{2}}^7 & 990x_{n+\frac{1}{2}}^8 & 1320x_{n+\frac{1}{2}}^9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24x_{n+1} & 60x_{n+1}^2 & 120x_{n+1}^3 & 210x_{n+1}^4 & 336x_{n+1}^5 & 504x_{n+1}^6 & 720x_{n+1}^7 & 990x_{n+1}^8 & 1320x_{n+1}^9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24x_{n+\frac{3}{2}} & 60x_{n+\frac{3}{2}}^2 & 120x_{n+\frac{3}{2}}^3 & 210x_{n+\frac{3}{2}}^4 & 336x_{n+\frac{3}{2}}^5 & 504x_{n+\frac{3}{2}}^6 & 720x_{n+\frac{3}{2}}^7 & 990x_{n+\frac{3}{2}}^8 & 1320x_{n+\frac{3}{2}}^9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24x_{n+2} & 60x_{n+2}^2 & 120x_{n+2}^3 & 210x_{n+2}^4 & 336x_{n+2}^5 & 504x_{n+2}^6 & 720x_{n+2}^7 & 990x_{n+2}^8 & 1320x_{n+2}^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 120x_n & 360x_n^2 & 840x_n^3 & 1680x_n^4 & 3024x_n^5 & 5040x_n^6 & 7920x_n^7 & 11880x_n^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 120x_{n+\frac{1}{2}} & 360x_{n+\frac{1}{2}}^2 & 840x_{n+\frac{1}{2}}^3 & 1680x_{n+\frac{1}{2}}^4 & 3024x_{n+\frac{1}{2}}^5 & 5040x_{n+\frac{1}{2}}^6 & 7920x_{n+\frac{1}{2}}^7 & 11880x_{n+\frac{1}{2}}^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 120x_{n+1} & 360x_{n+1}^2 & 840x_{n+1}^3 & 1680x_{n+1}^4 & 3024x_{n+1}^5 & 5040x_{n+1}^6 & 7920x_{n+1}^7 & 11880x_{n+1}^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 120x_{n+\frac{3}{2}} & 360x_{n+\frac{3}{2}}^2 & 840x_{n+\frac{3}{2}}^3 & 1680x_{n+\frac{3}{2}}^4 & 3024x_{n+\frac{3}{2}}^5 & 5040x_{n+\frac{3}{2}}^6 & 7920x_{n+\frac{3}{2}}^7 & 11880x_{n+\frac{3}{2}}^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 120x_{n+2} & 360x_{n+2}^2 & 840x_{n+2}^3 & 1680x_{n+2}^4 & 3024x_{n+2}^5 & 5040x_{n+2}^6 & 7920x_{n+2}^7 & 11880x_{n+2}^8 \end{pmatrix},$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} y_n, y_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{3}{2}}, f_n, f_{n+\frac{1}{2}}, f_{n+1}, \\ f_{n+\frac{3}{2}}, f_{n+2}, g_n, g_{n+\frac{1}{2}}, g_{n+1}, g_{n+\frac{3}{2}}, g_{n+2} \end{bmatrix}^T, \quad (9)$$

$$\underline{X} = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}]^T.$$

Vektor \underline{X} dapat diselesaikan dengan $\underline{X} = A^{-1}\underline{U}$ dan hasilnya digantikan dengan,

$$x_{n+v_j} = x_n + \frac{v_j}{h}, v_j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2.$$

Pekali $\alpha_{n+v_j}, \beta_{n+v_j}, \gamma_{n+v_j}$ dapat diperoleh dalam bentuk persamaan yang merangkumi anu t . Selepas itu, gantikannya kepada (2). Kemudian, pemalar $\alpha_{v_j}, \beta_{v_j}, \gamma_{v_j}, v_j = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ digantikan dengan $t = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ untuk menghasilkan kaedah blok utama, iaitu

$$y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}y_{n+\frac{3}{2}} + h^3 \left(-\frac{28489}{34836480}f_n - \frac{19027}{1088640}f_{n+\frac{1}{2}} - \frac{1627}{80640}f_{n+1} - \frac{3277}{1088640}f_{n+\frac{3}{2}} - \frac{6439}{34836480}f_{n+2} \right) + h^4 \left(-\frac{781}{11612160}g_n - \frac{61}{362880}g_{n+\frac{1}{2}} + \frac{101}{46080}g_{n+1} + \frac{13}{22680}g_{n+\frac{3}{2}} + \frac{47}{2322432}g_{n+2} \right), \quad (10)$$

$$y_{n+2} = y_n - 2y_{n+\frac{1}{2}} + 2y_{n+\frac{3}{2}} + h^3 \left(\frac{2183}{725760}f_n + \frac{1627}{13440}f_{n+1} + \frac{2183}{725760}f_{n+2} + \frac{697}{11340}f_{n+\frac{1}{2}} + \frac{697}{11340}f_{n+\frac{3}{2}} \right) + h^4 \left(\frac{127}{483840}g_n - \frac{127}{483840}g_{n+2} + \frac{269}{120960}g_{n+\frac{1}{2}} - \frac{269}{120960}g_{n+\frac{3}{2}} \right). \quad (11)$$

Diketahui persamaan pembezaan biasa peringkat tiga merangkumi terbitan pertama dan kedua secara umum. Terbitan pertama dan terbitan kedua dibentuk seperti berikut:

$$Y'(x) = \frac{1}{h} \left(\sum_{j=0}^k \alpha'_j y_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \alpha'_{v_j} y_{n+v_j} + h^3 \left(\sum_{j=0}^k \beta'_j f_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \beta'_{v_j} f_{n+v_j} \right) + h^4 \left(\sum_{j=0}^k \gamma'_j g_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \gamma'_{v_j} g_{n+v_j} \right) \right) \quad (12)$$

$$Y''(x) = \frac{1}{h^2} \left(\sum_{j=0}^k \alpha''_j y_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \alpha''_{v_j} y_{n+v_j} + h^3 \left(\sum_{j=0}^k \beta''_j f_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \beta''_{v_j} f_{n+v_j} \right) + h^4 \left(\sum_{j=0}^k \gamma''_j g_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \gamma''_{v_j} g_{n+v_j} \right) \right). \quad (13)$$

Gantikan pekali a_1 yang telah diperoleh daripada (12) dan (13) kepada,

$$Y'(x) = \sum_{i=1}^{r+s-1} ia_i x^{i-1},$$

$$Y''(x) = \sum_{i=2}^{r+s-1} i(i-1)a_i x^{i-2},$$

serta persamaan $x_n = x$ th untuk memperoleh fungsi interpolasi bagi kaedah hibrid tak tersirat yang selanjut dalam bentuk persamaan seperti berikut:

$$hy'_n = -\frac{8}{3}y_n + 3y_{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}y_{n+\frac{3}{2}} + h^3 \left(\frac{1010987}{63866880}f_n + \frac{3483}{98560}f_{n+1} + \frac{14617}{12773376}f_{n+2} + \frac{23785}{399168}f_{n+\frac{1}{2}} + \frac{2377}{181440}f_{n+\frac{3}{2}} \right) + h^4 \left(\frac{22097}{21288960}g_n - \frac{6901}{591360}g_{n+1} - \frac{389}{3041280}g_{n+2} - \frac{28771}{2661120}g_{n+\frac{1}{2}} - \frac{1597}{532224}g_{n+\frac{3}{2}} \right),$$

$$hy'_{n+\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}y_n + y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}y_{n+\frac{3}{2}} + h^3 \left(-\frac{215297}{76640256}f_n - \frac{1181}{44352}f_{n+1} - \frac{161851}{383201280}f_{n+2} - \frac{286277}{5987520}f_{n+\frac{1}{2}} - \frac{33899}{5987520}f_{n+\frac{3}{2}} \right) + h^4 \left(-\frac{2567}{11612160}g_n + \frac{5881}{1182720}g_{n+1} + \frac{853}{18247680}g_{n+2} + \frac{7169}{3991680}g_{n+\frac{1}{2}} + \frac{953}{798336}g_{n+\frac{3}{2}} \right),$$

$$hy'_{n+1} = -y_{n+\frac{1}{2}} + y_{n+\frac{3}{2}} + h^3 \left(-\frac{619}{4354560}f_n - \frac{3293}{98560}f_{n+1} - \frac{619}{4354560}f_{n+2} - \frac{2983}{748440}f_{n+\frac{1}{2}} - \frac{2983}{748440}f_{n+\frac{3}{2}} \right) + h^4 \left(-\frac{481}{31933440}g_n + \frac{481}{31933440}g_{n+2} - \frac{4691}{7983360}g_{n+\frac{1}{2}} + \frac{4691}{7983360}g_{n+\frac{3}{2}} \right),$$

$$\begin{aligned}
 hy'_{n+2} = & \frac{8}{3}y_n - 5y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{7}{3}y_{n+\frac{3}{2}} + h^3 \left(\frac{1756087}{191600640}f_n + \frac{317699}{887040}f_{n+1} \right. \\
 & \left. + \frac{4569793}{191600640}f_{n+2} + \frac{96347}{544320}f_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1338151}{5987520}f_{n+\frac{3}{2}} \right) \\
 & + h^4 \left(\frac{52873}{63866880}g_n + \frac{6901}{591360}g_{n+1} - \frac{22199}{12773376}g_{n+2} \right. \\
 & \left. + \frac{71299}{7983360}g_{n+\frac{1}{2}} + \frac{5567}{1140480}g_{n+\frac{3}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h^2y''_{n+2} = & \frac{8}{3}y_n - 4y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}y_{n+\frac{3}{2}} + h^3 \left(\frac{967177}{63866880}f_n + \frac{991}{2016}f_{n+1} \right. \\
 & \left. + \frac{11567543}{63866880}f_{n+2} + \frac{483083}{1995840}f_{n+\frac{1}{2}} + \frac{805237}{1995840}f_{n+\frac{3}{2}} \right) \\
 & + h^4 \left(\frac{31897}{21288960}g_n + \frac{123103}{1774080}g_{n+1} - \frac{13385}{1419264}g_{n+2} \right. \\
 & \left. + \frac{4607}{190080}g_{n+\frac{1}{2}} + \frac{84433}{1330560}g_{n+\frac{3}{2}} \right).
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 h^2y''_n = & \frac{8}{3}y_n - 4y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}y_{n+\frac{3}{2}} + h^3 \left(-\frac{4737971}{27371520}f_n - \frac{27}{160}f_{n+1} \right. \\
 & \left. - \frac{194957}{27371520}f_{n+2} - \frac{40981}{171072}f_{n+\frac{1}{2}} - \frac{66839}{855360}f_{n+\frac{3}{2}} \right) \\
 & + h^4 \left(-\frac{557621}{63866880}g_n + \frac{123103}{1774080}g_{n+1} + \frac{50987}{63866880}g_{n+2} \right. \\
 & \left. + \frac{276971}{3991680}g_{n+\frac{1}{2}} + \frac{14615}{798336}g_{n+\frac{3}{2}} \right),
 \end{aligned}$$

Normalkan (10), (11) dan (14) untuk memperoleh

$$I \cdot \underline{Y}^{(1)} = A_N \cdot \underline{Y}^{(0)} + h^3(B_N \cdot \underline{F}) + h^4(C_N \cdot \underline{G}), \tag{15}$$

dengan

$$A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{9}{8} & 2 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

$$\begin{aligned}
 h^2y''_{n+\frac{1}{2}} = & \frac{8}{3}y_n - 4y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}y_{n+\frac{3}{2}} + h^3 \left(\frac{46955}{12773376}f_n - \frac{877}{10080}f_{n+1} \right. \\
 & \left. - \frac{17239}{63866880}f_{n+2} - \frac{75209}{997920}f_{n+\frac{1}{2}} - \frac{7687}{997920}f_{n+\frac{3}{2}} \right) \\
 & + h^4 \left(\frac{5167}{21288960}g_n + \frac{10837}{1774080}g_{n+1} + \frac{197}{7096320}g_{n+2} \right. \\
 & \left. - \frac{11051}{665280}g_{n+\frac{1}{2}} + \frac{157}{133056}g_{n+\frac{3}{2}} \right),
 \end{aligned}$$

$$B_N = \begin{pmatrix} 21033953 & 12683 & 1078587 & 4244 & 2602339 & 140 & 39015 & 6353 & 1539551 & 24463 & 6501 & 1601 \\ 1532805120 & 181440 & 6307840 & 13365 & 38320128 & 891 & 157696 & 18711 & 8709120 & 136080 & 35840 & 8505 \\ 1447 & 148 & 7101 & 512 & 148231 & 784 & 18531 & 55808 & 89371 & 3308 & 921 & 4096 \\ 9580032 & 3465 & 39424 & 1215 & 11975040 & 4455 & 49280 & 93555 & 544320 & 8505 & 2240 & 8505 \\ 135 & 20 & 26973 & 64 & 1807 & 1 & 3159 & 208 & 103 & 104 & 81 & 208 \\ 39424 & 693 & 197120 & 165 & 80640 & 10 & 8960 & 315 & 1260 & 315 & 140 & 315 \\ 154109 & 716 & 2691 & 512 & 243193 & 272 & 6813 & 34304 & 38341 & 788 & 711 & 4096 \\ 47900160 & 31185 & 39424 & 2673 & 11975040 & 4455 & 49280 & 93555 & 544320 & 8505 & 2240 & 8505 \\ 487679 & 1 & 39717 & 40 & 382169 & 26 & 8469 & 3457 & 59681 & 1153 & 411 & 1601 \\ 1532805120 & 448 & 6307840 & 2673 & 191600640 & 4455 & 788480 & 93555 & 8709120 & 136080 & 35840 & 8505 \end{pmatrix}^T,$$

$$\underline{F} = \left[f_n, f_{n+\frac{1}{2}}, f_{n+1}, f_{n+\frac{3}{2}}, f_{n+2} \right]^T,$$

$$\begin{aligned}
 h^2y''_{n+1} = & \frac{8}{3}y_n - 4y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}y_{n+\frac{3}{2}} + h^3 \left(\frac{1278107}{191600640}f_n + \frac{1627}{10080}f_{n+1} \right. \\
 & \left. + \frac{51745}{38320128}f_{n+2} + \frac{894497}{5987520}f_{n+\frac{1}{2}} + \frac{86879}{5987520}f_{n+\frac{3}{2}} \right) \\
 & + h^4 \left(\frac{5021}{9123840}g_n - \frac{10861}{354816}g_{n+1} - \frac{9557}{63866880}g_{n+2} \right. \\
 & \left. + \frac{9451}{3991680}g_{n+\frac{1}{2}} - \frac{14221}{3991680}g_{n+\frac{3}{2}} \right),
 \end{aligned}$$

$$C_N = \begin{pmatrix} 26587 & 241 & 52137 & 488 & 28343 & 1277 & 9747 & 538 & 26051 & 421 & 339 & 29 \\ 46448640 & 73920 & 6307840 & 31185 & 9123840 & 166320 & 788480 & 31185 & 2903040 & 45360 & 35840 & 2835 \\ 20869 & 50 & 3483 & 512 & 551 & 41 & 4509 & 3712 & 31207 & 38 & 279 & 128 \\ 6386688 & 2079 & 56320 & 4455 & 24948 & 693 & 49280 & 31185 & 362880 & 567 & 4480 & 2835 \\ 40291 & 1 & 95499 & 80 & 32027 & 40 & 19197 & 80 & 81 & 1 & 81 & 0 \\ 14192640 & 48 & 1576960 & 693 & 1774080 & 693 & 197120 & 693 & 1280 & 10 & 1280 & 0 \\ 719 & 58 & 1269 & 1024 & 3959 & 17 & 9 & 128 & 1243 & 62 & 183 & 128 \\ 912384 & 10395 & 78848 & 31185 & 798336 & 1155 & 308 & 2455 & 72576 & 2835 & 4480 & 2835 \\ 18311 & 167 & 81 & 10 & 14339 & 109 & 27 & 20 & 2237 & 43 & 9 & 29 \\ 510935040 & 665280 & 114688 & 6237 & 63866880 & 166320 & 22528 & 6237 & 72576 & 45360 & 7168 & 2835 \end{pmatrix}^T,$$

$$\underline{G} = \left[g_n, g_{n+\frac{1}{2}}, g_{n+1}, g_{n+\frac{3}{2}}, g_{n+2} \right]^T.$$

PERINGKAT DAN SIFAT KESTABILAN

PERINGKAT KAEDAH

Merujuk kepada Henrici (1962) dan Yap et al. (2014), pengoperasi terbitan linear, L terhadap (2) dirumuskan sebagai,

$$\begin{aligned}
 h^2y''_{n+\frac{3}{2}} = & \frac{8}{3}y_n - 4y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}y_{n+\frac{3}{2}} + h^3 \left(\frac{1588549}{191600640}f_n + \frac{459}{1120}f_{n+1} \right. \\
 & \left. + \frac{832507}{191600640}f_{n+2} + \frac{513749}{2993760}f_{n+\frac{1}{2}} + \frac{143263}{598752}f_{n+\frac{3}{2}} \right) \\
 & + h^4 \left(\frac{46477}{63866880}g_n + \frac{10837}{1774080}g_{n+1} - \frac{29203}{63866880}g_{n+2} \right. \\
 & \left. + \frac{14191}{1995840}g_{n+\frac{1}{2}} - \frac{6427}{285120}g_{n+\frac{3}{2}} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L[y(x); h] = & \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \alpha_{v_j} y_{n+v_j} - h^3 \left(\sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \beta_{v_j} f_{n+v_j} \right) \\
 & - h^4 \left(\sum_{j=0}^k \gamma_j g_{n+j} + \sum_{j=1}^2 \gamma_{v_j} g_{n+v_j} \right),
 \end{aligned} \tag{16}$$

dengan $y(x)$ merupakan sebarang fungsi yang boleh diterbitkan. Kembangkan fungsi ujian $y(x + jh)$ terbitan ketiga, $y'''(x + jh)$ dan keempat, $y^{(4)}(x + jh)$ bagi x dan kumpulkan pekali untuk memperoleh,

$$L[y(x); h] = C_0 y(x) + C_1 h y'(x) + C_2 h^2 y''(x) + \dots + C_q h^q y^{(q)}(x) + \dots, \tag{17}$$

yang pekali $C_q, q = 0, 1, 2, \dots$ pemalar dan rumus pekali diberi seperti berikut:

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{j=0}^k \alpha_j + \sum_{j=1}^2 \alpha_{v_j}, \\ C_1 &= \sum_{j=1}^k j \alpha_j + \sum_{j=1}^2 v_j \alpha_{v_j}, \\ C_2 &= \frac{1}{2!} \left[\sum_{j=1}^k j^2 \alpha_j + \sum_{j=1}^2 v_j^2 \alpha_{v_j} \right], \\ C_3 &= \frac{1}{3!} \left[\sum_{j=1}^k j^3 \alpha_j + \sum_{j=1}^2 v_j^3 \alpha_{v_j} \right] - \left(\sum_{j=0}^k \beta_j + \sum_{j=0}^2 \beta_{v_j} \right), \\ C_4 &= \frac{1}{4!} \left[\sum_{j=1}^k j^4 \alpha_j + \sum_{j=1}^2 v_j^4 \alpha_{v_j} \right] - \left(\sum_{j=1}^k j \beta_j + \sum_{j=1}^2 v_j \beta_{v_j} \right) - \left(\sum_{j=0}^k \gamma_j + \sum_{j=0}^2 \gamma_{v_j} \right), \\ C_p &= \frac{1}{p!} \left[\sum_{j=1}^k j^p \alpha_j + \sum_{j=1}^2 v_j^p \alpha_{v_j} \right] - \frac{1}{(p-3)!} \left(\sum_{j=1}^k j^{p-3} \beta_j + \sum_{j=1}^2 v_j^{p-3} \beta_{v_j} \right) \\ &\quad - \frac{1}{(p-4)!} \left(\sum_{j=1}^k j^{p-4} \gamma_j + \sum_{j=1}^2 v_j^{p-4} \gamma_{v_j} \right), \end{aligned} \tag{18}$$

dengan $p = 5, 6, 7, \dots$

Diperoleh $C_0 = C_1 = \dots = C_{12} = 0$ bagi (10) dan (11). Maka $C_{13} = -\frac{277}{16480720650240}$ bagi (10) dan $C_{13} = \frac{277}{2746786775040}$ bagi (11). Ini membuktikan kaedah blok hibrid kolokasi ini adalah berperingkat dua belas disebabkan pekali $C_q = 0, q = 0, 1, \dots, 12$ dan $C_{13} \neq 0$.

KETEKALAN

Menurut kajian yang dijalankan oleh Suli dan Mayers (2003), kaedah multilangkah dikatakan tekal sekiranya ia mempunyai peringkat, $p \geq 1$. Disebabkan peringkat kaedah blok hibrid kolokasi ini adalah dua belas, maka kaedah tersebut adalah tekal.

KESTABILAN SIFAR

Kaedah blok hibrid kolokasi dikatakan mempunyai kestabilan sifar sekiranya modulus bagi punca polinomial cirian pertama adalah kurang daripada satu atau sama

dengan satu (Gandaan tidak lebih daripada peringkat persamaan pembezaan biasa) (Henrici 1962; Randall 2007). Polinomial cirian pertama dirumuskan sebagai

$$\rho(\lambda) = Pen[A - \lambda I],$$

dengan I adalah identiti bagi matrik 12×12 . Selepas pengiraan dijalankan, diperoleh

$$\rho(\lambda) = \lambda^3 (\lambda - 1)^3 = 0,$$

$\lambda = 0$ (gandaan sebanyak sembilan) atau $\lambda = 1$ (gandaan sebanyak tiga).

Gandaan punca bagi polinomial cirian pertama, $\lambda = 1$, bilangannya tidak melebihi tiga, maka kaedah blok hibrid kolokasi ini mempunyai sifat kestabilan sifar.

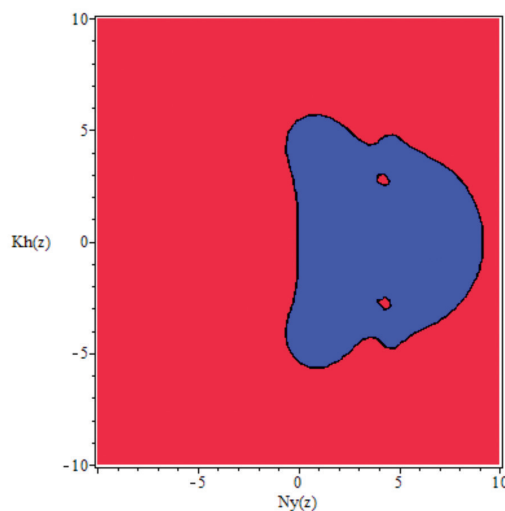
PENUMPUAN

Berdasarkan Teorem Kesetaraan Dahlquist (Iserles 1996), kaedah multilangkah adalah menumpu jika ia memenuhi sifat kestabilan sifar dan ketekalan. Disebabkan KBHK(B) adalah kaedah multilangkah dan ia mempunyai sifat kestabilan sifar dan ketekalan, maka KBHK(B) juga menumpu.

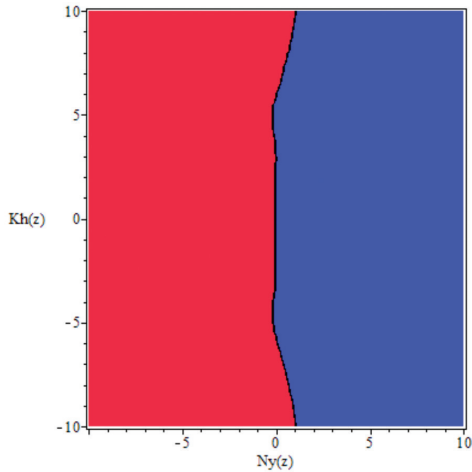
RANTAU KESTABILAN MUTLAK

Rantau kestabilan mutlak (RKM) bagi suatu kaedah menunjukkan betapa besar nilai maksimum bagi saiz langkah yang mungkin yang boleh wujud untuk memastikan kaedah tersebut stabil. Dalam kaedah blok hibrid kolokasi baru, terdapat empat persamaan yang boleh diuji daripada segi RKM, iaitu anggaran penyelesaian persamaan $y_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+1}, y_{n+\frac{3}{2}}, y_{n+2}$.

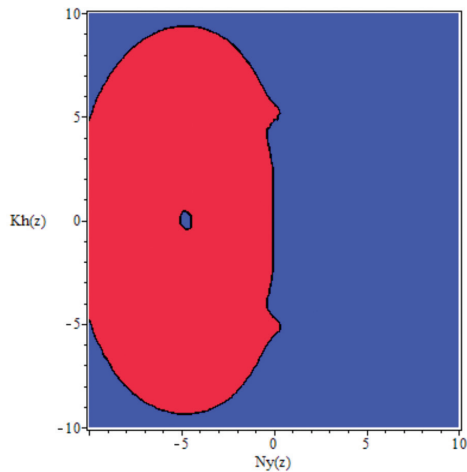
Bahagian merah melambangkan rantau kestabilan mutlak bagi persamaan yang terpilih manakala bahagian biru adalah rantau yang tidak stabil secara mutlak. Berdasarkan Rajah 1 - 4, RKM bagi keempat-empat



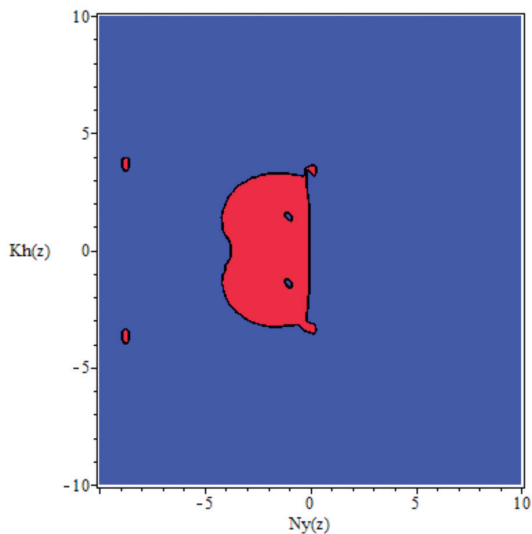
RAJAH 1. RKM bagi $y_{n+\frac{1}{2}} = C_1 y_n$



RAJAH 2. RKM bagi $y_{n+1} = C_2 y_n$



RAJAH 3. RKM bagi $y_{n+3/2} = C_3 y_n$



RAJAH 4. RKM bagi $y_{n+2} = C_4 y_n$

persamaan adalah besar terutamanya persamaan $y_{n+1/2} = C_1 y_n$ dan $y_{n+1} = C_2 y_n$ yang mempunyai sifat stabil-A dengan rantau $Ny(z) < 0$.

UJIAN BERANGKA DAN PERBINCANGAN

Untuk menguji kecekapan KBHK(B), tiga masalah PPBPT dipilih untuk diselesaikan KBHK(B) secara berangka. KBHK(B) dibandingkan dengan kaedah blok hibrid kolokasi sedia ada daripada segi ralat sejagat dan bilangan langkah. Fungsi siri kuasa digunakan sebagai kaedah peramal untuk meramalkan penyelesaian sebelum kaedah blok hibrid kolokasi digunakan untuk menyelesaikannya secara tersirat.

Toleransi ralat ditetapkan sebagai 1.0×10^{-30} . Bilangan langkah, k bagi ketiga-tiga kaedah adalah tidak sama. Demi membuktikan KBHK(B) mampu menghasilkan ralat sejagat maksimum yang paling minimum dengan menggunakan bilangan langkah yang minimum, maka hasil pendaraban bagi bilangan langkah dalam satu blok, k dan saiz langkah, h untuk KBHK(B) ditetapkan kepada nilai yang paling tinggi (0.2) berbanding dengan KBHK(Y) (0.15) dan KBHK(A) (0.1) supaya jumlah bilangan langkah yang diperlukan dalam menyelesaikan masalah PPBPT yang terpilih adalah paling minimum. Kaedah blok yang mampu menghasilkan ralat sejagat maksimum yang paling minimum dengan menggunakan nilai hk yang paling minimum adalah kaedah yang paling cekap dalam menyelesaikan masalah PPBPT yang terpilih.

Singkatan berikut digunakan:

- KBHK(Y): Kaedah blok hibrid kolokasi yang dikemukakan oleh Yap et al. (2014)
- KBHK(A): Kaedah pembetul bagi kaedah blok hibrid kolokasi yang dibina oleh Abdullahi et al. (2016)
- MAKS: Ralat sejagat yang maksimum
- JUM: Jumlah bilangan blok yang diperlukan

Masalah 1 (Yap et al. 2014)

$$y'' = 3 \sin(x)$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2, x \in [0, b].$$

Penyelesaian tepat: $y(x) = 3\cos(x) + \frac{x^2}{2} - 2.$

Masalah 2 (Yap et al. 2014)

$$y'''(x) = -y'(x)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2, x \in [0, b].$$

Penyelesaian tepat: $y(x) = 2(1 - \cos(x)) + \sin(x).$

Masalah 3 (Yap et al. 2014)

$$y'''(x) = 2y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) + 34x \cdot \exp(-2x) - 16 \exp(-2x) - 10x^2 + 6x + 34$$

$$y(0) = 3, y'(0) = 0, y''(0) = 0, x \in [0, b].$$

Penyelesaian tepat: $y(x) = x^2 \exp(-2x) - x^2 + 3$.

Berdasarkan Jadual 1, 2 dan 3, didapati KBHK(B) adalah kaedah yang paling baik antara tiga KBHK yang terpilih dalam menyelesaikan tiga masalah berangka yang dipilih, iaitu ia menghasilkan ralat sejagat maksimum yang paling minimum. Malahan jumlah bilangan langkah yang diperlukan kurang daripada dua kaedah blok yang lain, iaitu KBHK(Y) dan KBHK(A). Dalam Jadual 1, ralat sejagat maksimum yang dihasilkan oleh KBHK(B) bagi menyelesaikan persamaan pembezaan biasa pada masalah 1 untuk $b = 10$ hanya sebanyak $1.4386292 \times 10^{-17}$ dengan memerlukan 50 blok ($h = 0.1$). KBHK(Y) dan KBHK(A) masing-masing menghasilkan ralat sejagat maksimum sebanyak $7.6320500 \times 10^{-11}$ ($h = 0.05$) dan 7.9800297×10^{-8} ($h = 0.02$) dengan memerlukan blok yang lebih banyak. Dalam Jadual 2, KBHK(B) tetap menghasilkan ralat sejagat

maksimum yang paling minimum bagi masalah 2, iaitu $1.2945616 \times 10^{-18}$ dengan hanya 50 blok ($h = 0.1$) bagi $b = 10$, berbanding dengan KBHK(Y), $1.3362812 \times 10^{-10}$ (67 blok dan $h = 0.05$) dan KBHK(A), 2.4364371×10^{-3} (100 blok dan $h = 0.02$). Dalam menyelesaikan masalah 3 yang lebih rumit, KBHK(B) tetap menunjukkan kecekapannya dengan menghasilkan ralat sejagat maksimum sebanyak $2.9055934 \times 10^{-12}$ dengan 350 blok ($h = 0.01$) bagi $b = 7$. KBHK(Y) pula menghasilkan ralat sejagat maksimum sebanyak 1.4902625×10^{-9} dengan 467 blok ($h = 0.005$). KBHK(A) adalah kaedah yang paling kurang cekap antara ketiga-tiga kaedah blok hibrid kolokasi dengan menghasilkan ralat sejagat maksimum melebihi satu dengan menggunakan 700 blok ($h = 0.002$).

KESIMPULAN

Secara keseluruhan, KBHK(B) menunjukkan kecekapan dalam menyelesaikan PPBPT dengan sifat kestabilan sifar, ketekalan, penumpuan dan rantau kestabilan mutlak yang luas. KBHK(B) mampu menghasilkan penyelesaian penghampiran bagi empat titik, $\{x_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+1}, x_{n+\frac{3}{2}}, x_{n+2}\}$ secara serentak. Berdasarkan hasil ujian berangka, didapati

JADUAL 1. Perbandingan penyelesaian bagi Masalah 1

	KBHK(B) ($h = 0.1, k = 2$) $h^*k = 0.2$		KBHK(Y) ($h = 0.05, k = 3$) $h^*k = 0.15$		KBHK(A) ($h = 0.02, k = 5$) $h^*k = 0.1$	
	MAKS	JUM	MAKS	JUM	MAKS	JUM
$b = 1$	$1.2581401 \times 10^{-20}$	5	$8.8960801 \times 10^{-14}$	7	$2.7620526 \times 10^{-10}$	10
$b = 5$	$3.5202478 \times 10^{-18}$	25	$1.9198353 \times 10^{-11}$	34	4.5774378×10^{-8}	50
$b = 10$	$1.4386292 \times 10^{-17}$	50	$7.6320500 \times 10^{-11}$	67	7.9800297×10^{-8}	100

JADUAL 2. Perbandingan penyelesaian bagi Masalah 2

	KBHK(B) ($h = 0.1, k = 2$) $h^*k = 0.2$		KBHK(Y) ($h = 0.05, k = 3$) $h^*k = 0.15$		KBHK(A) ($h = 0.02, k = 5$) $h^*k = 0.1$	
	MAKS	JUM	MAKS	JUM	MAKS	JUM
$b = 1$	$2.3116751 \times 10^{-20}$	5	$2.0393055 \times 10^{-12}$	7	4.6299897×10^{-5}	10
$b = 5$	$5.0007506 \times 10^{-19}$	25	$5.5154887 \times 10^{-11}$	34	9.2783961×10^{-4}	50
$b = 10$	$1.2945616 \times 10^{-18}$	50	$1.3362812 \times 10^{-10}$	67	2.4364371×10^{-3}	100

JADUAL 3. Perbandingan penyelesaian bagi Masalah 3

	KBHK(B) ($h = 0.01, k = 2$) $h^*k = 0.02$		KBHK(Y) ($h = 0.005, k = 3$) $h^*k = 0.015$		KBHK(A) ($h = 0.002, k = 5$) $h^*k = 0.01$	
	MAKS	JUM	MAKS	JUM	MAKS	JUM
$b = 1$	$3.5567389 \times 10^{-17}$	50	$1.9502644 \times 10^{-14}$	67	1.0810866×10^{-5}	100
$b = 5$	$1.9206175 \times 10^{-13}$	250	$1.0797812 \times 10^{-10}$	334	5.3254064×10^{-2}	500
$b = 10$	$2.9055934 \times 10^{-12}$	350	1.4902625×10^{-9}	467	1.0380009	700

kecekapan KBHK(B) dalam menyelesaikan PPBPT dengan ralat sejagat yang maksimum adalah paling minimum dan kaedah ini merupakan kaedah yang terbaik dengan jumlah blok yang digunakan kurang daripada KBHK(Y) dan KBHK(A). Kesimpulannya, KBHK(B) dengan dua-langkah dan empat titik kolokasi mempunyai kecekapan yang tinggi dalam menyelesaikan PPBPT.

PENGHARGAAN

Penulis merakamkan penghargaan atas dana yang digunakan dalam penyelidikan ini, iaitu GP-K006926 dan GP-K007788.

RUJUKAN

- Abdullahi, Y.A., Omar, Z. & Kuboye, J.O. 2016. Derivation of block predictor–block corrector method for direct solution of third order ordinary differential equations. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics* 12(1): 343-350.
- Adesanya, A.O., Fasansi, M.K. & Odekunle, M.R. 2013. One step, three hybrid block predictor-corrector method for the solution. *Journal of Applied & Computational Mathematics* 2: 137. doi: 10.4172/2168-9679.1000137
- Henrici, P. 1962. *Discrete Variable Methods In Ordinary Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons.
- Iserles, A. 1996. *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*. Edisi ke-2. London: Cambridge University Press.
- Jator, S.N. 2008. Multiple finite difference methods for solving third order ordinary differential equations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 43(2): 253-265.
- Majid, Z.A., Azmi, N.A., Suleiman, M. & Ibrahim, Z.B. 2012. Solving directly general third order ordinary differential equations using two-point four step block method. *Sains Malaysiana* 41(5): 623-632.
- Majid, Z.A., Suleiman, M.B. & Azmi, N.A. 2010. Variable step size block method for solving directly third order ordinary differential equations. *Far East Journal of Mathematical Sciences* 41(1): 63-73.
- Mohammed, U. & Adeniyi, R.B. 2014. A three step implicit hybrid linear multistep method for the solution of third order ordinary differential equation. *Gen. Math.* 25(1): 62-72.
- Olabode, B.T. & Yusuph, Y. 2009. A new block method for special third order ordinary differential equations. *Journal of Mathematics and Statistics* 5(3): 167-170.
- Randall, J.L. 2007. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Suli, E. & Mayers, D.F. 2003. *An Introduction to Numerical Analysis*. New York: Cambridge University Press.
- Yap, L.K., Ismail, F. & Senu, N. 2014. An accurate block hybrid collocation method for third order ordinary differential equations. *Journal of Applied Mathematics* 2014. Article ID. 549597.

Pusat Pengajian Sains Matematik
Fakulti Sains dan Teknologi
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi, Selangor Darul Ehsan
Malaysia

*Pengarang untuk surat-menyurat; email: ummul@ukm.edu.my

Diserahkan: 8 Jun 2017

Diterima: 5 Mei 2018